Tutorato di Algebra Lineare
Esercizi su sottospazi e applicazioni lineari: **soluzioni**

CdL in Informatica - Università di Pisa

13 Marzo 2025

Esercizio 1. Sia W_1 il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ definito da $W_1 = \mathrm{span}(v_1, v_2)$, dove

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

e sia W_2 il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ definito dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}.$$

Determinare una base di $W_1 \cap W_2$ e di $W_1 + W_2$.

Soluzione. Osserviamo innanzitutto che v_1 e v_2 sono vettori linearmente indipendenti (basta osservare che la prima entrata di v_2 è nulla mentre la prima entrata di v_1 è non nulla). Determiniamo una base di W_2: il vettore generico di W_2 ha coordinate x_1, x_2, x_3, x_4 che soddisfano le equazioni del sistema, per cui possiamo scrivere

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in W_2 \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_3} + x_4 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_4}.$$

Quindi ogni vettore di W_2 è una combinazione lineare di v_3 e v_4. Inoltre v_3 e v_4 sono linearmente indipendenti, quindi formano una base di W_2.

Poiché $W_1 + W_2 = \mathrm{span}(v_1, v_2, v_3, v_4)$, per trovare una base di $W_1 + W_2$ basta estrarre una base dall'insieme $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Con l'algoritmo di Gauss troviamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 - R_1]{R_2 + R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 + \frac{1}{2}R_2]{R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4 + \frac{1}{2}R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice ottenuta ha 4 pivot, per cui i vettori v_1, v_2, v_3, v_4 sono linearmente indipendenti e quindi formano una base di $W_1 + W_2$. Dalla formula di Grassmann, troviamo

$$\dim(W_1 \cap W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 + W_2) = 2 + 2 - 4 = 0,$$

quindi $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ (in questo caso – per convenzione/definizione – la base è l'insieme vuoto).

Esercizio 2. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione finita. Siano f e g due endomorfismi[1] di V tali che

$$\operatorname{im}(f) + \operatorname{im}(g) = \ker(f) + \ker(g) = V.$$

Mostrare che $\ker(f) \cap \ker(g) = \operatorname{im}(f) \cap \operatorname{im}(g) = \{0\}$.

Soluzione. La tesi si ottiene combinando opportunamente la formula di Grassmann (G) e la formula "dimensione del nucleo + rango" (N+R) con le ipotesi del testo. Queste ultime dicono che

$$\dim(V) = \dim(\ker(f) + \ker(g)) \stackrel{\text{G}}{=} \dim\ker(f) + \dim\ker(g) - \dim(\ker(f) \cap \ker(g))$$
$$\dim(V) = \dim(\operatorname{im}(f) + \operatorname{im}(g)) \stackrel{\text{G}}{=} \dim\operatorname{im}(f) + \dim\operatorname{im}(g) - \dim(\operatorname{im}(f) \cap \operatorname{im}(g))$$

Sommando le due uguaglianze, troviamo

$$\begin{aligned} 2\dim(V) &= \dim\ker(f) + \dim\operatorname{im}(f) + \dim\ker(g) + \dim\operatorname{im}(g) - \dim(\ker(f) \cap \ker(g)) - \dim(\operatorname{im}(f) \cap \operatorname{im}(g)) \\ &\stackrel{\text{N+R}}{=} 2\dim(V) - \dim(\ker(f) \cap \ker(g)) - \dim(\operatorname{im}(f) \cap \operatorname{im}(g)), \end{aligned}$$

da cui

$$\dim(\ker(f) \cap \ker(g)) + \dim(\operatorname{im}(f) \cap \operatorname{im}(g)) = 0.$$

Osserviamo che gli addendi nel membro sinistro sono numeri non negativi la cui somma è 0, quindi sono necessariamente nulli.

Esercizio 3. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita sulla base canonica di $\mathbb{R}^3$ da

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\0\\4\end{pmatrix}.$$

1. Determinare una base di $\ker f$.
2. Determinare una base di $\operatorname{im} f$.
3. Verificare che $\mathbb{R}^3 = \ker f \oplus \operatorname{im} f$. [2]

Soluzione. La matrice che rappresenta f nella base canonica è data da

$$A = \begin{pmatrix}-2 & 0 & -4\\ 0 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 4\end{pmatrix}.$$

[1] Un *endomorfismo* di V è un'applicazione lineare $F\colon V \to V$.

[2] Diciamo che uno spazio vettoriale V si decompone in *somma diretta* di due sottospazi vettoriali W_1 e W_2 (e scriviamo $V = W_1 \oplus W_2$) se $V = W_1 + W_2$ e $W_1 \cap W_2 = \{0\}$

1. Ricordiamo che $\ker f$ è l'insieme delle soluzioni del sistema associato alla matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right).$$

Riducendo A con operazioni elementari, troviamo

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3+R_1} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}R_2]{-\frac{1}{2}R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui $\ker f$ è l'insieme delle soluzioni del sistema dato dalle equazioni $x_1 + 2x_3 = 0$ e $x_2 = 0$. In particolare, il generico vettore di $\ker f$ si scrive come

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v}.$$

Ne consegue che $\ker f = \operatorname{span}(v)$.

2. L'immagine di f è il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dalle colonne di A. Una sua base può essere ottenuta estraendola dall'insieme delle colonne. Per quanto visto prima (applicazione dell'algoritmo di Gauss), una base è data dalle prime due colonne (che indichiamo con v_1 e v_2).

3. Osserviamo che $\ker f + \operatorname{im} f = \operatorname{span}(v_1, v_2, v)$ e che la matrice avente come colonne v_1, v_2, v si riduce con operazioni elementari a una matrice avente tre pivot:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3+R_1} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

In particolare v_1, v_2, v sono linearmente indipendenti e quindi $\ker f + \operatorname{im} f = \mathbb{R}^3$. Applicando la formula di Grassmann, concludiamo che $\ker f \cap \operatorname{im} f = \{0\}$, quindi $\mathbb{R}^3 = \ker f \oplus \operatorname{im} f$.

Esercizio 4. Sia A la matrice in $M(3, \mathbb{R})$ data da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Determinare una base di $\ker A$.[3]
2. Verificare che $\operatorname{im} A \subseteq \ker A$.
3. Consideriamo un intero $n \geq 2$. Chi è la matrice A^n?

[3] Ricordiamo che $\ker A$ denota $\ker L_A$, dove $L_A \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è l'applicazione lineare associata alla matrice A. Analogamente $\operatorname{im} A$ denota $\operatorname{im} L_A$.

Soluzione. 1. Osserviamo che la seconda e la terza riga sono multiple della prima, per cui applicando l'algoritmo di Gauss troviamo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi $\ker A$ è l'insieme dei vettori di $\mathbb{R}^3$ che soddisfano l'equazione $x_1 + x_2 - x_3 = 0$. In particolare, si ha

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \ker A \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} = x_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_1} + x_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_2}.$$

Come negli esercizi precedenti, si verifica facilmente che v_1, v_2 formano una base di $\ker A$.

2. Osserviamo che $\operatorname{im} A$ è il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ generato dalle colonne di A, che sono uguali a meno del segno. Quindi, detto v il vettore della prima colonna, si ha $\operatorname{im} A = \operatorname{span}(v)$. Allora è sufficiente mostrare che $v \in \ker A$, e ciò si può dedurre (ad esempio) dal fatto che

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = v_1 - 3v_2.$$

3. Poiché $\operatorname{im} A \subseteq \ker A$, per ogni $w \in \mathbb{R}^3$ si ha $Aw \in \ker A$, quindi $A^2 w = A(Aw) = 0$. Quindi la matrice A^2 è la matrice nulla (corrisponde all'applicazione nulla). In particolare, se $n \geq 2$ si ha $A^n = A^{n-2}A^2 = 0$.

Nota. Il prossimo esercizio è facoltativo (o meglio, è più facoltativo degli altri!) e richiede delle conoscenze di base del corso di Analisi Matematica.

Esercizio 5 (★ Algebra lineare e un po' di analisi)**.** Consideriamo gli insiemi

$$C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ continua}\}$$
$$C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ derivabile, } f' \text{ continua}\}$$

dove f' denota la funzione derivata di f.

1. Verificare che l'insieme $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, munito delle usuali operazioni di somma e prodotto per scalare, è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e che $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ è un suo sottospazio.
2. Mostrare che le funzioni e^x, e^{2x} in $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sono linearmente indipendenti.
3. Dato un intero positivo n, mostrare che le funzioni $1, e^x, e^{2x}, \dots, e^{nx}$ sono linearmente indipendenti (qui 1 indica la funzione costante $1(x) = 1$).
   [Suggerimento: posto $t = t(x) = e^x$, si ha $e^{kx} = t^k$. Cosa significa che una combinazione lineare di $1, t, \dots, t^n$ (con coefficienti reali fissati!) è uguale alla funzione nulla?]

Consideriamo l'operatore di derivata

$$\begin{array}{cccc} D & : & C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \longrightarrow & C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ & & f & \longmapsto & f' \end{array}$$

Ricordiamo che D è un'applicazione lineare e che $D(e^{ax}) = a e^{ax}$ per ogni $a \in \mathbb{R}$. In particolare, l'applicazione D si restringe a un endomorfismo del sottospazio $V = \operatorname{span}(1, e^x, e^{2x}, \dots, e^{nx})$ di $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

4. Determinare nucleo e immagine della mappa $D\colon V \to V$ e scrivere la matrice associata a D nella base $1, \mathrm{e}^x, \mathrm{e}^{2x}, \dots, \mathrm{e}^{nx}$ di V.

5. (**Extra tutorato.**[4]) Consideriamo ora $W = \mathrm{span}(\mathrm{e}^x, \mathrm{e}^{2x}, \dots, \mathrm{e}^{nx}) \subseteq V$ e consideriamo l'endomorfismo di W ottenuto restringendo D a W. Questo endomorfismo è un isomorfismo? Nel caso, determinare l'inversa.

Soluzione. 1. Bisogna verificare le proprietà di spazio vettoriale[5] per $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e quelle di sottospazio per $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. In entrambi i casi, le uniche verifiche "non banali" sono la chiusura per somma e per prodotto per scalare, ma queste seguono direttamente dal fatto che somme e prodotti di funzioni continue (derivabili) sono funzioni continue (derivabili).

2. Siano $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $a\mathrm{e}^x + b\mathrm{e}^{2x} = 0$. Mostriamo che necessariamente $a = b = 0$. Poiché e^x è una funzione positiva, l'uguaglianza precedente è equivalente a $a + b\mathrm{e}^x = 0$. Se $b = 0$, allora necessariamente anche $a = 0$ e abbiamo concluso. Supponiamo per assurdo $b \neq 0$. Allora abbiamo $\mathrm{e}^x = -a/b$. Ma a, b sono numeri reali fissati (cioè la funzione $-a/b$ è la funzione costantentemente uguale a $-a/b$). D'altra parte e^x non è costante, quindi otteniamo una contraddizione.

3. Siano $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tali che $a_0 + a_1\mathrm{e}^x + \ldots + a_n\mathrm{e}^{nx} = 0$. Mostriamo che $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0$. Sia $t = t(x) = \mathrm{e}^x$. Allora si ha $a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n = 0$. Supponiamo per assurdo che non tutti gli a_i siano nulli. Allora t soddisfa un'equazione polinomiale di grado (al più) n. Poiché un'equazione polinomiale di grado n (a coefficienti reali) ammette al più n soluzioni distinte, la funzione $t = \mathrm{e}^x$ può assumere al più n valori distinti, il che è chiaramente assurdo.

4. Poiché
$$\forall\, k \in \{0, 1, \dots, n\}, \qquad D(\mathrm{e}^{kx}) = k\mathrm{e}^{kx},$$
la matrice associata a D nella base $1, \mathrm{e}^x, \mathrm{e}^{2x}, \dots, \mathrm{e}^{nx}$ di V è diagonale e data da
$$\begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & n-1 & \\ & & & & & n \end{pmatrix}.$$
Inoltre, poiché $D(a_0 + a_1\mathrm{e}^x + a_2\mathrm{e}^{2x} \ldots + a_n\mathrm{e}^{nx}) = a_1\mathrm{e}^x + 2a_2\mathrm{e}^{2x} + \ldots + na_n\mathrm{e}^{nx}$, si ha
$$\begin{aligned} \ker D &= \mathrm{span}(1) = \{\alpha \cdot 1 \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \qquad \text{(le funzioni costanti)} \\ \mathrm{im}\, D &= \mathrm{span}(\mathrm{e}^x, \mathrm{e}^{2x}, \dots, \mathrm{e}^{nx}). \end{aligned}$$
Ciò poteva essere dedotto direttamente guardando la matrice: le funzioni $1, \mathrm{e}^x, \dots, \mathrm{e}^{nx}$ corrispondono ai vettori $e_1, e_2, \dots, e_{n+1}$ di $\mathbb{R}^{n+1}$ (e questa corrispondenza è infatti un isomorfismo $V \to \mathbb{R}^{n+1}$ di spazi vettoriali).

[4]Ho deciso di aggiungere questa domanda dopo la discussione avvenuta post tutorato.

[5]Se si è già visto che l'insieme delle funzioni $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (munito delle usuali operazioni di somma e di prodotto per scalare) è uno spazio vettoriale, il primo caso si può ridurre a mostrare che $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ è un suo sottospazio.

5. Per quanto visto nel punto precedente, la restrizione di D a W ha come matrice associata (nella base $\mathrm{e}^x, \mathrm{e}^{2x}, \dots, \mathrm{e}^{nx}$ di W)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & n-1 & \\ & & & & n \end{pmatrix}.$$

In questo caso il nucleo è $\{0\}$ e (quindi) l'immagine è tutto W. In particolare, questa restrizione è un isomorfismo. Per ottenere l'inversa, osserviamo che $\mathrm{e}^{kx} = \frac{1}{k} D(\mathrm{e}^{kx})$, quindi l'applicazione lineare $I \colon W \to W$ definita sulla base $\mathrm{e}^x, \mathrm{e}^{2x}, \dots, \mathrm{e}^{nx}$ da

$$\forall\, k \in \{1, \dots, n\}, \qquad I(\mathrm{e}^{kx}) = \frac{1}{k}\mathrm{e}^{kx}$$

soddisfa $I \circ D = \mathrm{id}$ e $D \circ I = \mathrm{id}$ (dove in questo caso consideriamo D come applicazione da W in W). In effetti, la matrice associata a I nella base $\mathrm{e}^x, \mathrm{e}^{2x}, \dots, \mathrm{e}^{nx}$ di W è

$$B = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \frac{1}{2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \frac{1}{n-1} & \\ & & & & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

e si ha $AB = BA = I_n$ (dove I_n è la matrice identità).

Analiticamente, l'applicazione I coincide con un operatore "primitiva" ristretto a W, che prende una funzione f in W e restituisce la funzione integrale

$$I(f)(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

(ricordiamo che le primitive sono determinate a meno di costante: nel nostro caso vogliamo che la costante sia nulla, da qui la scelta del "$-\infty$" nell'integrale).